25/5/2019

Έστω ότι G είναι μία άπειρη ομάδα. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική αν και μόνο αν κάθε υποομάδα $H \neq \{e\}$ της G είναι ισόμορφη με την G.

Λύση

($\leftarrow$) Κάθε υποομάδα $H \neq \{e\}$ της G είναι ισόμορφη με το G. Έστω $a \neq e$ στοιχείο της G.
(G έχει άπειρα στοιχεία)

$H = \langle a \rangle \quad H \neq \{e\} \implies H$ ισόμορφη με την G

Η κυκλική άρα και η ισόμορφη της είναι κυκλική.

$H \simeq G \Longrightarrow$ υπάρχει ισομορφισμός $H \xrightarrow{f} G$

$H = \langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ισχυριζόμαστε ότι η $G \stackrel{?}{=} \langle f(a) \rangle$

Έστω $b \in G$ και f επί, άρα υπάρχει $\gamma \in \underset{\langle a \rangle}{H}$

τέτοιο ώστε $f(\gamma) = b$

$\gamma \in H = \langle a \rangle \Rightarrow \gamma = a^\lambda \quad b = f(\gamma) = f(a^\lambda) =$

$(f(a))^\lambda \Rightarrow b \in \langle f(a) \rangle$. Άρα $G \subset \langle f(a) \rangle$

Έστω $\delta \in \langle f(a) \rangle \Longrightarrow \delta = f(a)^\mu$

$f(a) \in G \quad G$ ομάδα

$\Rightarrow f(a)^\mu \in G$ δηλ $\delta \in G$. Άρα $\langle f(a) \rangle \subseteq G$

Άρα $G = \langle f(a) \rangle$. Άρα G κυκλική.

$(\longrightarrow)$ G άπειρη + G κυκλική $G = \langle \omega \rangle =$
$\{\omega^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ω έχει άπειρη τάξη.

Έστω $H \neq \{e\}$ υποομάδα της G.

Κάθε υποομάδα κυκλικής ομάδας είναι κυκλική.

Άρα $H = \langle \omega^s \rangle$ κυκλική. το $s \neq 0$ (αφού αν
$s = 0 \Longrightarrow \langle \omega^0 \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$ και $H \neq \{e\}$
ΑΤΟΠΟ)

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ \| & & \| \\ \langle \omega \rangle & & \langle \omega^s \rangle \end{array} \qquad \phi(\omega^n) = \omega^{ns}$$

$a, b \in G \Rightarrow a = \omega^n \quad b = \omega^m$

$\phi(ab) = \phi(\omega^n \cdot \omega^m) = \phi(\omega^{n+m}) = \omega^{(n+m)s} =$
$\omega^{ns+ms} = \omega^{ns} \cdot \omega^{ms} = \varphi(\omega^n) \cdot \varphi(\omega^m) = \phi(a) \cdot \phi(b)$

φ ομομορφισμός

Έστω $y \in H = \langle \omega^s \rangle \Longrightarrow y = (\omega^s)^\nu = \omega^{\nu \cdot s}$

Οπότε $\varphi(\omega^\nu) = \omega^{\nu s} = y$

Άρα φ επί

Έστω $x \in \ker\phi \subseteq G \Rightarrow x = \omega^{j}$
$\phi(x) = e \Rightarrow \phi(\omega^{j}) = e \Rightarrow$
$\omega^{js} = e \Rightarrow$ i) $j = 0$ ή ii) $j \neq 0$
$\omega^{js} = e \Rightarrow$
$ord(\omega) \mid js \Rightarrow ord(\omega)$ πεπερασμένη. ΑΤΟΠΟ
(ξέρουμε $s \neq 0$)
Άρα $j = 0$ $x = \omega^{0} = e \Rightarrow \ker\phi = \{e\} \Rightarrow \phi$ 1-1.

5φυλ4) Υπολόγισε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων από $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$1 \to n$
$\varphi(k) = kn$
$\phi_n(k) = kn$
$\phi(k+\lambda) = (k+\lambda)n = kn + \lambda n = \phi(k) + \phi(\lambda)$
ϕ ομομορφισμός

Άρα έχω άπειρους ομομορφισμούς ομάδων από το $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Κάθε ένας από αυτούς είναι της μορφής $\phi_n(k) = nk$, για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$

- Υπολόγισε όλους τους ομομορφισμούς δακτυλίων από το $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$1 \xrightarrow{\phi} \phi(1)$ $\quad \phi(1)\cdot\phi(1) = \phi(1\cdot 1) = \phi(1) \Rightarrow \phi(1)^2 = \phi(1)$

$\Rightarrow \phi(1)^2 - \phi(1) = 0 \Rightarrow \phi(1)(\phi(1) - 1) = 0 \Rightarrow$
$\phi(1) = 1$ ή $\phi(1) = 0$ $\quad \mathbb{Z}$ ακέραια περιοχή.
i) $\phi(1) = 0$. Τότε $\phi(k) = 0$ ομομορφισμός
$\phi(k+\lambda) = 0 = \phi(k) + \phi(\lambda)$
$\phi(k\cdot\lambda) = 0 = \phi(k)\cdot\phi(\lambda)$
ii) $\phi(1) = 1$ Τότε $\phi(k) = k \Rightarrow \phi(k+\lambda) = k+\lambda = \phi(k) + \phi(\lambda)$
$\phi(k\lambda) = k\cdot\lambda = \phi(k)\cdot\phi(\lambda)$

- Υπολογίστε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων από το $\mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_{15}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_{15} \\ 1 \to \phi(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} ord(\phi(1)) \mid ord(1) = 25 \\ ord(\phi(1)) \in \{1, 5, 25\} \end{array}$$

$\phi(1) \in \mathbb{Z}_{15} \Rightarrow ord(\phi(1)) \mid 15 \Rightarrow ord(\phi(1)) \in \{1, 3, 5, 15\}$

i) $ord\,\phi(1) = 1 \Rightarrow \phi(1) = 0 \Rightarrow \quad \phi([k]_{25}) = [0]_{15}$ ομομορφισμός

ii) $ord(\phi(1)) = 5 \Rightarrow \phi(1) \in \{[3], [6], [9], [12]\}$

$\phi_1([k]) = [3k]_{15} \qquad \phi_3([k]) = 9k$

$\phi_2([k]) = [6k] \qquad \phi_4([k]) = 12k.$

$\phi_2([k]_{25}) = [6k]_{15}$

$\phi_2([k + 25\lambda]) = [6(k + 25\lambda)]_{15} = [6k + \cancel{150\lambda}^{0}]_{15} =$
$[6k]$ καλά ορισμένη.

$\phi_2([k] + [\lambda]) = \phi_2([k+\lambda]) = [6(k+\lambda)] = [6k + 6\lambda] = [6k] +$

$[6\lambda] = \phi([k]) + \phi([\lambda])$ $\Rightarrow$ ομομορφισμός ομάδων

Φυλ6. ασκ.2) Έστω $(G, *)$ ομάδα. Η κανονική υποομάδα της G. Έστω $a, b \in G$ με $a * b \in H$. Δείξτε ότι $b * a \in H$. Επίσης, βρείτε υποομάδα H της S_3 και $a, b \in S_3$ με $a \circ b \in H$ και $b \circ a \notin H$

ΛΥΣΗ $\quad b * a = a^{-1} * (a * b) * a$

Αφού $a * b \in H$ και H κανονική, έπεται ότι $b * a \in H$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $H = \langle (1,3) \rangle = \{(1)(2)(3), (1,3)\}$ υποομάδα S_3 και $a = (1,2,3) \in S_3$ $b = (1,2) \in S_3$

Τότε $a \circ b = (1,2,3)\circ(1,2) = (1,3) \in H$
ενώ $b \circ a = (1,2)\circ(1,2,3) = (2,3) \notin H$.

ΦΥΛ.6 Ασκ. 9.1

<u>ΛΥΣΗ</u> Αφού $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ αβελιανή, κάθε υποομάδα είναι κανονική, άρα και η H και άρα ορίζεται η ομάδα πηλίκο $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/H$

Ορίζουμε $\phi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/H \to \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}$ με

$$\phi((a,b)+H) = ([a]_2, a-b) \in \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z} \text{ για } a,b\in\mathbb{Z}$$

<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1</u> ϕ καλά ορισμένη

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $a,b,a',b' \in \mathbb{Z}$ με $(a,b)+H = (a',b')+H$ θα δείξουμε ότι $[a]_2 = [a']_2$ και $a-b = a'-b'$ $(a,b)+H = (a',b')+H \iff (a,b)-(a',b') \in H \Rightarrow (a-a', b-b') \in H$. Άρα υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$ με $(a-a', b-b') = k(2,2)$

Συνεπώς, $a = a'+2k$ (1) και $b = b'+2k$ (2)

(1) $\Rightarrow 2 \mid a-a' \Rightarrow [a]_2 = [a']_2$
Αφαιρώντας (2) από (1) $\Rightarrow a-b = a'-b'$
Άρα ϕ καλά ορισμένη.

ϕ ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ ΟΜΑΔΩΝ

Έστω $a,a',b,b' \in \mathbb{Z}$. Τότε $\phi(((a+b)+H)+((a',b)+H)) =$

$\phi((a+a', b+b')+H) = ([a+a']_2, (a+a')-(b+b'))$

$= ([a]_2+[a']_2, (a-b)+(a'-b')) =$

$([a]_2, a-b) + [a']_2, a'-b') = \phi((a,b)+H) + \phi((a',b')+H)$

Συνεπώς ϕ ομομορφισμός ομάδων.

ΙΣΧΥΡ. 3 ϕ 1-1

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού ϕ ομομορφισμός ομάδων, αρκεί να δείξουμε ότι $Ker\phi = \{(0,0)+H\}$

Έστω $a,b \in \mathbb{Z}$ με $(a,b)+H \in Ker\phi$. Άρα

$$\phi((a,b)+H) = ([0]_2, 0) \Rightarrow ([a]_2, a-b) = ([0]_2, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [a]_2 = [0]_2 & (3) \\ a = b & (4) \end{cases}$$

(3) $\Rightarrow$ a άρτιος, άρα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ με $a = 2\kappa$

Από (4) $b = a = 2\kappa$

Άρα $(a,b) = (2\kappa, 2\kappa) = \kappa(2,2) \in H$

Συνεπώς $(a,b)+H = (0,0)+H$

Άρα $Ker\phi = \{(0,0)+H\}$, άρα ϕ 1-1.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 4 ϕ ΕΠΙ

Έστω $c \in \mathbb{Z}$ Θα δείξουμε ότι $([0]_2, c) \in Im\phi$ και $([1]_2, c) \in Im\phi$

Έχουμε δύο περιπτώσεις

Περίπτωση 1) $c = 2\kappa$ άρτιος με $\kappa \in \mathbb{Z}$

Τότε $([0]_2, c) = \phi((c,0)+H)$ και $([1]_2, c) = \phi((c+1,1)+H)$

Περίπτωση 2) c περιττός άρα $c = 2\kappa+1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Τότε $([0]_2, c) = \phi(((c+1),1)+H)$ και $([1]_2, c) = \phi((c,0)+H)$. Άρα ϕ ΕΠΙ. Συνεπώς από Ισχυρ. 1,2,3,4 ϕ καλά ορισμένος ισομορφ. ομάδων.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ.

1) Έστω G ομάδα, $a \in G$ με $ord(a) = n < \infty$ και $s \in \mathbb{Z}$. Τότε $ord(a^s) = \dfrac{n}{ΜΚΔ(n,s)}$

2) Έστω G πεπερασμένη ομάδα N κανονική υποομάδα της G. Τότε η ομάδα G/N είναι πεπερασμένη και $|G/N| = \dfrac{|G|}{|N|}$

αριθμός στοιχείων

3) Έστω $n \geq 2$. Τότε η ομάδα $(\mathbb{Z}_n, +)$ είναι κυκλική με τάξη n και γεννήτορα το $[1]_n \in \mathbb{Z}_n$

4) Έστω $G = \langle a \rangle$ πεπερασμένη κυκλική με $|G| = n \geq 2$. Τότε κάθε υποομάδα H της G είναι κυκλική. Επιπλέον, αν $s \in \mathbb{Z}$ έχουμε ισότητα $\langle a^s \rangle = \langle a^{ΜΚΔ(n,s)} \rangle$ και άρα $\langle a^s \rangle = \{a^d, a^{2d}, \ldots, a^{(\frac{n}{d}-1)d}, a^n = e\}$ όπου $d = ΜΚΔ(n,s)$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $n \geq 2$ ακέραιος και $s \in \mathbb{Z}$. Τότε το στοιχείο $[s]_n$ της ομάδος $(\mathbb{Z}_n, +)$ έχει τάξη ίση με $\dfrac{n}{ΜΚΔ(n,s)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έχουμε $(\mathbb{Z}_n, +)$ κυκλική με γεννήτορα το $[1]_n$ και $[s]_n = s[1]_n$. Το αποτέλεσμα έπεται από ΥΠΕΝΘ. 1

ΦΥΛ.6 ΑΣΚ.7. Βρείτε την τάξη της ομάδας πηλίκο $\dfrac{\mathbb{Z}_{60}}{(\langle [39]_{60} \rangle)}$

ΛΥΣΗ Έστω $n = 60$, $s = 39$. Από υπενθύμιση

$$\frac{|\mathbb{Z}_{60}|}{|\langle [39]_{60} \rangle|} \underset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}{=} \frac{60}{\frac{60}{ΜΚΔ(60,39)}} =$$

$= \text{ΜΚΔ}(60,39)$

$60 = 3\cdot 20 = 3\cdot 5\cdot 2\cdot 2$

$39 = 3\cdot 13$

Άρα $\left| \dfrac{\mathbb{Z}_{60}}{<[39]_{60}>} \right| = \text{ΜΚΔ}(60,39) = 3$

Παρόμοια, τα (1), (2) της ίδιας άσκησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ (χρήσιμη για [illegible] φυλ.6 ασκ 8)

Έστω $n \geq 2$, $s, a \in \mathbb{Z}$. Θέτουμε $H = <[s]_n>$ υποομάδα της $(\mathbb{Z}_n, +)$. Θέτουμε $d = \text{ΜΚΔ}(s,n)$. Τότε τα στοιχεία $[a]_n + H$ της ομάδας πηλίκο $\mathbb{Z}_n/H$ έχει τάξη $\dfrac{d}{\text{ΜΚΔ}(d,a)}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Είδαμε $|H| = \dfrac{n}{\text{ΜΚΔ}(n,s)}$

Άρα η $\mathbb{Z}_n/H$ έχει τάξη $\dfrac{|G|}{|H|} = \dfrac{n}{\frac{n}{\text{ΜΚΔ}(n,s)}} =$

$\text{ΜΚΔ}(n,s) = d$. Φανερά $\mathbb{Z}_n/H$ κυκλική με γεννήτορα το $[1]_n + H$. Το αποτέλεσμα έπεται από Υπενθ. 1.

Φυλ.6 ασκ.8. Βρείτε την τάξη του στοιχείου $[26]_{60} + H$ στην ομάδα $\mathbb{Z}_n/H$, όπου $H = <[12]_{60}>$

<u>Λύση</u> Εφαρμ. πρόταση για $n = 60$, $s = 12$, $a = 26$

Έχουμε $d = \text{ΜΚΔ}(s,n) = \text{ΜΚΔ}(60,12) = 12$.

Συνεπώς από την Πρόταση η τάξη του στοιχείου $[a]_n + H = [26]_{60} + H$ είναι ίση με $\dfrac{d}{\text{ΜΚΔ}(d,a)} = \dfrac{12}{\text{ΜΚΔ}(12,26)} =$

$\dfrac{12}{2} = 6$. Παρόμοια φυλ.6 ασκ.8 Νο1.

ΦΥΛ.6 ασκ. 9.2.

<u>ΛΥΣΗ</u> Ορίζουμε $\phi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4/H \to \mathbb{Z}_2$

με [illegible] $\phi(([a]_2, [b]_4) + H) = [a]_2$ για $a, b \in \mathbb{Z}$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1) ϕ καλά ορισμένη

2) ϕ ομομορφισμός ομάδων

3) ϕ 1-1

4) ϕ ΕΠΙ

Παρόμοια με αυτά που κάναμε.

Φυλ.6 ασκ. 9.3

Λύση Ορίζουμε $\phi: (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

με $\phi(([a]_2, [b]_4) + H) = ([a]_2, [b]_2)$, για $a, b \in \mathbb{Z}$

Ισχυρ. 1-4 όπως πάνω.

Φυλ.6 ασκ.6

Λύση $\mathbb{C}^* = \{a+bi : a, b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)\}$

$T =$ μοναδιαίος κύκλος στο $\mathbb{R}^2$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1 (ΓΝΩΣΤΟ) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: $z = a+bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$)

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2 T υποομάδα του $\mathbb{C}^*$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $1+0i \in T$ άρα $T \neq \emptyset$. Αν $z_1 \in T$ από ΙΣΧΥΡ. 1 $1 = |1| = |z_1^{-1}| \cdot |z_1| = |z_1^{-1}|$, άρα $z_1^{-1} \in T$

Επίσης, αν $z_1, z_2 \in T$ τότε από Ισχυρ. 1 $z_1 z_2 \in T$, γιατί $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 1 \cdot 1 = 1$

Ορίζουμε $\phi: \mathbb{C}^*/T \to \mathbb{R}_{>0}$ με $\phi(z \cdot T) = |z|$

ΙΣΧΥΡ 1 ϕ καλά ορισμένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $z, z' \in \mathbb{C}^*$ με $z \cdot T = z' \cdot T \Rightarrow$
$z^{-1} \cdot z' \in T \Rightarrow |z^{-1} \cdot z'| = 1 \Rightarrow |z^{-1}| \cdot |z'| = 1 \Rightarrow$
$|z| = |z'|$ Άρα ϕ καλά ορισμένη.

ΙΣΧΥΡ. 2 ϕ ομομ. ομάδων από ισχυρ. 1.

ΙΣΧΥΡ. 3 ϕ 1-1 Δ.δ.ο. $\ker\phi = \{1 \cdot T\}$ Πράγματι, έστω $z \in \mathbb{C}^*$ με $z \cdot T \in \ker\phi$. Τότε $\phi(zT) = 1 \Rightarrow$
$|z| = 1 \Rightarrow z \in T \Rightarrow zT = 1 \cdot T$

ΦΥΛ.6 ΑΣΚ.5

ΛΥΣΗ:

ΙΣΧΥΡ. Έστω $a\in\mathbb{R}$. Τότε το στοιχείο $a+\mathbb{Z}$ της ομάδας πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ έχει πεπερ. τάξη αν και μόνο αν $a\in\mathbb{Q}$.

ΦΥΛ.7 ασκ.6

Λύση (Διόρθωση εκφώνησης: Έστω R πεπερασμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο)

$$R=\{0, \underset{a_0}{\underset{\parallel}{1}}, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Έστω $a\neq 0$, $a\in\{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

Τα στοιχεία $aa_0, aa_1, aa_2, \ldots, aa_n$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο.

(Έστω $aa_i = aa_j \Rightarrow aa_i - aa_j = 0 \Rightarrow a(a_i-a_j)=0$ $(a\neq 0)$

$\Rightarrow a_i - a_j = 0 \Rightarrow a_i - a_j$)

$$\{aa_0, aa_2, \ldots, aa_n\} \subset \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \Longrightarrow$$

$aa_i\neq 0$ $\quad$ $n+1$ στοιχεία $\quad$ $n+1$ στοιχεία

$$\{aa_0, \ldots, \underset{1}{aa_n}\} = \{\underset{1\in}{a_0, \ldots}, a_n\}$$

Άρα το $1\in\{aa_0,\ldots,aa_i,\ldots,aa_n\} \Longrightarrow$

$1=aa_t$ για κάποιο $0\le t\le n$.

$$\Rightarrow aa_ta=1a \Rightarrow aa_ta=a \Rightarrow \underset{a\neq 0}{a}(a_ta-1)=0 \Rightarrow$$

$a_ta-1=0$ $\quad$ $a_ta=1$

Άρα το a αντιστρέψιμο και ο αντίστροφος του a είναι ο a_t. $\Longrightarrow$ R δακτύλιος διαίρεσης.

- $\mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_{15}$ $\varphi([a]) = 0$

$\varphi([a]) = [6a]$

$\varphi([a]+[b]) = \varphi([a+b]) = [6(a+b)] =$

$[6a]+[6b] = \varphi(a)+\varphi(b)$

$\varphi([a])\cdot\varphi([b]) = [6a]\cdot[6b] = [36ab] = [(30+6)ab]_{15}$

$\varphi([ab]) = [6ab]$

$R_1 \times R_2 \quad \times R_n$

$(a_1,a_2,\dots,a_n)+(b_1,b_2,\dots,b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)$

$(a_1,a_2,\dots,a_n)(b_1,b_2,\dots b_n) = (a_1b_1, a_2b_2,\dots,a_nb_n)$

$(0,0)$ × $(1,0)$ μηδενοδιαιρέτης $(0,1)(1,0) = (0\cdot 1, 1\cdot 0) = (0,0)$

$(0,1)$ μηδενοδιαιρ. $(1,1)$ μοναδ. άρα αντιστρ.

$(0,2)$ « $(1,2)$ μηδεν. $(0,2)(1,2) = (0,4) = (0,0)$

$(0,3)$ « $(1,3)$ αντιστρ. $(0,3)(1,0) = (0,0)$

$(a,b)(1,1) = (a,b)$, $(1,1)(1,1) = (1,1)$

$0 = [0]_2$ $1 = [1]_2$ $(1,3)(1,3) = (1,1)$

Έστω R, S δακτύλιοι με μονάδα και έστω $f: R \to S$ είναι μη-μηδενικός ομομορφισμός δακτυλίων. Αν ο S δεν έχει διαιρέτες του μηδενός. Δείξτε ότι $f(1_R) = 1_S$

$f(1_R) = f(1_R\cdot 1_R) = f(1_R)\cdot f(1_R) \Rightarrow f(1_R)1_S - f(1_R)f(1_R)$
$= 0 \Rightarrow f(1_R)(1_S - f(1_R)) = 0$

$f(1_R) = 0$ ή $f(1_R) = 1_S$

$f(a)$ $a \in R$ $f(a) = f(a\cdot 1_R) = f(a)\cdot f(1_R) = f(a)\cdot 0 = 0$

f μηδενικός ΑΤΟΠΟ

Άρα $f(1_R) = 1_S$.

- Αν f επιμορφισμός: $f: R \to S$ f επί

$1_S \in S$ f επί $\Rightarrow$ υπάρχει $b \in R$: $f(b) = 1_S$

$f(b) = 1_S$ $f(b\cdot 1_R) = f(b) = 1_S$

$f(b)\cdot f(1_R) = 1_S \Rightarrow 1_S\cdot f(1_R) = 1_S \Rightarrow f(1_R) = 1_S$